

# Phân tích mất ổn định cho hệ dầm micro chịu tác dụng của lực tĩnh điện có xét đến ảnh hưởng của mật độ điện tích phân bố trên bề mặt dầm

**Phạm Ngọc Chung<sup>1</sup>, Nguyễn Như Hiếu<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Mỏ - Địa chất, 18 Phố Viên, Phường Đức Thắng, Quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội

<sup>2</sup>Khoa Cơ khí - Cơ điện tử, Trường Đại học Phenikaa, Đường Nguyễn Văn Trác, Phường Yên Nghĩa, Quận Hà Đông, Hà Nội

## TỪ KHOÁ

MEMS

Dầm micro

Lực tĩnh điện

Mật độ điện tích

Mất ổn định

## KEYWORDS

MEMS

Microbeam

Electrostatic force

Charge density

Pull-in instability

## TÓM TẮT

Mất ổn định kéo vào là một hiện tượng xuất hiện trong các hệ vi cơ điện tử (MEMS - Micro-electro-mechanical system) khi mà điện thế tác dụng vượt một ngưỡng nào đó làm hai bản cực hút nhau thông qua lực hút tĩnh điện và chạm vào nhau trong điều kiện chúng cách nhau một khoảng cách khá nhỏ. Trong nghiên cứu này, các tác giả phân tích đáp ứng mất ổn định kéo vào của một hệ dầm công - xôn dưới tác dụng của lực tĩnh điện và có xét đến ảnh hưởng của mật độ điện tích phân bố trên bề mặt dầm trong một hệ kết cấu MEMS điển hình. Sử dụng phương pháp Galerkin và phương pháp nghiệm chính xác cho phương trình bậc ba trong trường hợp đơn mode, các tác giả đã thu được các đường cong cho điều kiện ổn định của hệ dầm. Ảnh hưởng của mật độ điện tích được xét đến cho phân tích chuyển dịch đáp ứng đầu tự do của dầm công - xôn, và chỉ ra điểm mất ổn định tại đầu tự do này ứng với các mật độ điện tích cụ thể.

## ABSTRACT

Pull-in instability is a phenomenon that occurs in micro-electro-mechanical systems (MEMS) when the applied voltage exceeds a certain threshold making an electrostatic attraction between two electrodes increase rapidly, causing the electrodes to touch each other. In this study, the authors have analyzed the pull-in instability of a cantilever microbeam that plays as an electrode, under the action of electrostatic force and took into account the influence of the charge density distributed on the beam surface of a typical MEMS structure. Using the Galerkin and exact solution methods for the cubic equation in the single-mode case, the authors have obtained a curve of stability condition of the microbeam system. The effect of charge density is taken into account for the tip displacement analysis of cantilever beam, and indicates the point of instability at tip of microbeam for specific charge density values.

## 1. Giới thiệu

Các công nghệ về hệ vi cơ điện tử MEMS (micro-electro-mechanical system) ngày càng phát triển và có những ứng dụng sâu rộng trong nhiều lĩnh vực khác nhau [1,2], chẳng hạn như hệ vi cơ điện tử trong các cảm biến được sử dụng trong các thiết bị công nghiệp, các cảm biến sinh học ứng dụng trong lĩnh vực y sinh... Về cơ bản, các hệ vi cơ điện tử có sự truyền động/chuyển động dựa trên tương tác cơ - điện giữa các phần tử của hệ với nhau. Các phần tử chính của hệ MEMS gồm hai bản cực, trong đó có một bản cực có thể thay đổi được vị trí và bản cực kia được giữ cố định [3]. Một số hệ MEMS có thể có nhiều bản cực được bố trí hợp lý phù hợp với mục đích thiết kế và công dụng nhất định. Các bản cực được mô hình hóa như các dầm hoặc tấm đàn hồi được đặt vào một hiệu điện thế một chiều hoặc xoay chiều hoặc kết hợp cả hai [4,5]. Giả sử đặt vào một hiệu điện thế một chiều, nếu giá trị của nó chưa đủ lớn, điện thế này sẽ sinh ra một lực hút tĩnh điện giữa hai bản cực cân bằng với lực đàn hồi dự trữ trong các bản cực. Nếu tăng điện thế đến giá trị tới hạn nào đó, sự cân bằng giữa lực điện và lực đàn hồi sẽ không còn nữa, thay vào đó, lực điện tăng nhanh và

kéo phần bản cực thay đổi được vị trí về phía bản cực cố định, và có thể va chạm vào bản cực cố định. Hiện tượng như trên người ta gọi là hiện tượng *mất ổn định kéo vào* (pull-in instability) [6]. Trong trường hợp bản cực được mô hình hóa như các dầm hoặc tấm đàn hồi, bản cực có thể võng tới mức có thể chạm vào bản cực cố định phía dưới, gây ra hiện tượng mất ổn định kéo vào. Hiện tượng mất ổn định kéo vào nói chung là không mong muốn vì nó gây hiện tượng ngắn mạch trong hệ, làm hư hỏng hệ và cần được tính đến trong quá trình thiết kế hệ vi cơ điện tử.

Dầm có kích thước micro đóng vai trò như một bản cực có thể coi là phần tử cơ bản của hệ MEMS, được quan tâm nghiên cứu trong nhiều thập niên trở lại đây. Dưới tác dụng của lực tĩnh điện giữa hai bản cực, ứng xử của hệ có bản chất phi tuyến và bộc lộ đặc trưng mất ổn định kéo vào vốn có của nó. Mất ổn định kéo vào gây ra những khó khăn nhất định trong quá trình thiết kế nhất là trong trường hợp khoảng cách không gian giữa hai bản tụ trở nên hẹp hơn. Trước hết nó làm giới hạn không gian hoạt động của hai bản tụ do tác dụng điện thế chỉ trong một giới hạn nhất định, ngoài giới hạn này hệ sẽ bị hỏng từ quá trình tiếp xúc của dầm với bản tụ cố định kia. Để khắc phục khó khăn này, người ta đã đề xuất một số phương pháp tăng cường giới

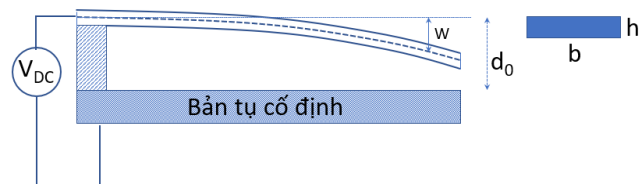
hạn hoạt động của hai bản tụ, chẳng hạn trong nghiên cứu của Rivlin và đồng nghiệp [7] bằng cách sử dụng lò xo phi tuyến để chống lại lực hút tĩnh điện phi tuyến trong bộ truyền động khoảng cách hẹp; Qiao và đồng nghiệp [8] sử dụng phương pháp dầm treo, nghĩa là thêm một dầm vào một cực dầm ban đầu để tạo thành dầm đôi có khả năng mở rộng miền hoạt động của tụ; Grade và đồng nghiệp [9] nghiên cứu độ võng lớn của hệ truyền động dạng hình lược và có những chiến lược tối ưu phù hợp để mở rộng phạm vi hoạt động của hệ truyền động; Chan và Dutton [10] sử dụng tụ dạng chuỗi để mở rộng miền không gian hiệu dụng hoạt động của tụ và cung cấp miền phản hồi ổn định hóa cho hệ truyền động.

Một vấn đề gây ảnh hưởng đến hiệu ứng kéo vào của hệ MEMS, đó là sự tích lũy điện tích trên bản tụ. Về mặt một mặt nào đó sự tích lũy điện tích có thể là không mong muốn vì nó gây ra những tác động đáng kể trong quá trình thiết kế và hoạt động của hệ truyền động. Các điện tích tích lũy này thường được gọi là điện tích tích lũy ký sinh [11]. Nguyên nhân của tích lũy điện tích ký sinh thường đến từ sự tiếp xúc khi thao tác lên thiết bị hoặc tiếp xúc của thiết bị với không gian chứa điện tích. Vì thế trong các cơ sở công nghiệp người ta thường có quy định về phòng sạch để tránh các điện tích tích lũy. Có những vật liệu làm điện cực giống như những ái lực điện từ, có bề mặt tiếp xúc trong điều kiện môi trường như độ ẩm, ô nhiễm cục bộ dẫn đến sự tích lũy điện tích tĩnh trên bề mặt bản tụ. Gần đây người ta lại nhìn nhận sự tích lũy điện tích tĩnh có những ưu điểm nhất định, chẳng hạn như vật liệu gọi là electret [12] có thể duy trì điện tích tĩnh trong một thời gian dài, sử dụng trong hệ MEMS để giảm điện áp kéo vào của hệ truyền động, có khả năng ứng dụng trong việc khai thác năng lượng tĩnh điện. Hơn thế nữa, người ta tận dụng điện tích tĩnh và ứng dụng hiệu quả trong chế tạo các cảm biến sinh học và hứa hẹn các phương pháp tiềm năng trong y học [13,14].

Phân tích trên cho thấy, cách tiếp cận điều khiển hệ truyền động trong hệ MEMS bằng điện áp và cả bằng điện tích cho thấy tiềm năng của nó trong các ứng dụng tương lai. Trong nghiên cứu này, các tác giả khảo sát đặc trưng mất ổn định kéo vào của một dầm công - xôn kích thước micro trong đó có xét đến ảnh hưởng của mật độ điện tích trên bề mặt dầm của hệ tụ đặt trong một điện thế cho trước. Việc nghiên cứu cả điện tích và điện áp trong một hệ MEMS là có ý nghĩa bởi vì chúng đều ảnh hưởng đến tính chất mất ổn định kéo vào của hệ và cần được xem xét trong quá trình thiết kế các hệ MEMS hiện đại ứng dụng trong lĩnh vực y sinh học và lĩnh vực công nghiệp. Đáp ứng tĩnh được xem xét trên cơ sở tính toán đơn mode trong ba trường hợp của mật độ điện tích phân bố trên bề mặt dầm. Các điểm mà hiện tượng kéo vào xảy ra đối với mỗi trường hợp cũng được tính toán và phân tích chi tiết.

## 2. Mô hình dầm công-xôn chịu tác dụng của lực tĩnh điện

Xét một thiết bị MEMS có cấu tạo như Hình 1, gồm hai bản cực, một bản cực được mô hình như một dầm công - xôn có thể dao động, bản cực kia được xem như một kết cấu cố định cách bản cực thứ nhất một khoảng không gian là  $d_0$ . Giữa hai bản cực có đặt một hiệu điện thế  $V_{DC}$  (đồng một chiều).



Hình 1. Mô hình dầm công - xôn với tương tác tĩnh điện

Khi có hiệu điện thế, dầm thứ nhất sẽ bị võng xuống và có thể dao động do tác dụng của lực tĩnh điện mà điện thế  $V_{DC}$  gây ra. Nhắc lại rằng, khi hiệu điện thế  $V_{DC}$  đủ lớn nó làm đầu tự do của dầm công - xôn có thể chạm đến bản cực thứ hai. Hiện tượng như thế gọi là *hiện tượng mất ổn định kéo vào* của hệ dầm tĩnh điện. Ngoài việc đặt vào hệ một hiệu điện thế, ta còn xét đến sự tồn tại của các hạt điện tích phân bố trên bề mặt dầm thứ nhất với mật độ phân bố điện tích bề mặt là  $p_s$  xác định bởi:

$$p_s = \frac{Q}{bL} \quad (1)$$

trong đó  $Q$  là điện tích trên bề mặt dầm có kích thước  $L \times b$  với  $L$  là chiều dài dầm,  $b$  là chiều rộng bề mặt dầm, ngoài ra dầm còn có chiều dày  $h$ . Lực do điện tích phân bố trên mỗi đơn vị chiều dài dầm cho bởi:

$$F_q = \frac{p_s^2 b}{2\varepsilon} \quad (2)$$

trong đó  $\varepsilon$  là hệ số điện thẩm của môi trường giữa hai bản tụ. Như vậy có thể thấy lực tĩnh điện là một hàm của mật độ điện tích, bề rộng  $b$  của dầm và hệ số điện thẩm  $\varepsilon$ . Hàm mật độ điện tích  $p_s$  được giả sử tuân theo quy luật  $p_s = p_s(x)$ , tức là thay đổi theo chiều dài của dầm. Trong mô hình nghiên cứu này, các tác giả sẽ xem xét 3 trường hợp cụ thể của  $p_s$  đối với dầm công - xôn.

- Trường hợp (I):  $p_s = p_0 = \text{const}$
- Trường hợp (II):  $p_s = p_0(1 + r_1 x)$  là một hàm tăng từ vị trí đầu ngàm đến đầu tự do của dầm, trong đó  $r_1$  là hệ số điện tích bậc nhất
- Trường hợp (III):  $p_s = p_0(1 - r_1 x)$  là một hàm giảm từ vị trí đầu cố định đến vị trí đầu tự do của dầm.

Lực tĩnh điện do điện thế  $V_{DC}$  gây ra là:

$$F_{DC} = \frac{\varepsilon b V_{DC}^2}{2(d_0 - W)^2} \quad (3)$$

trong đó  $W = W(t, x)$  là độ võng của dầm phụ thuộc thời gian  $t$  và vị trí  $x$  trên đoạn  $[0, L]$ . Phương trình chuyển động của dầm công - xôn cho bởi:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + c \frac{\partial W}{\partial t} + \rho b h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon b V_{DC}^2}{2(d_0 - W)^2} + \frac{p_s^2 b}{2\varepsilon} \quad (4)$$

trong đó  $E$  là mô đun đàn hồi,  $I = bh^3/12$  là mô men quán tính của tiết diện mặt cắt ngang dầm;  $c$  là hệ số cản nhớt tuyến tính. Điều kiện biên của dầm công - xôn cho bởi:

$$W(t,0)=0, \frac{\partial W}{\partial x}(t,0)=0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(t,L)=0, \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(t,L)=0 \quad (5)$$

Trong phương trình (4), ảnh hưởng của mật độ điện tích  $p_s$  sẽ được tính đến, trong đó lưu ý rằng nếu mật độ này bằng không thì hệ dầm chỉ còn tác dụng của điện thế  $V_{DC}$  lên đáp ứng của hệ. Ý nghĩa của mật độ điện tích  $p_s$  nằm ở chỗ, trong thực tế nếu tồn tại một lượng điện tích sẵn có bên trong bản cực, nó sẽ góp phần vào đẩy nhanh sự xuất hiện của hiện tượng kéo vào khi điện thế được kích hoạt, đồng nghĩa với việc hệ sẽ nhạy cảm hơn trong phản ứng và dẫn đến điều này cần phải được chú ý hơn trong thiết kế hệ MEMS.

### 3. Điều kiện ổn định của điểm cân bằng do lực tĩnh điện

Để cho tiện khảo sát và đánh giá hệ (4), ta đưa nó về dạng không thứ nguyên thông qua việc đưa vào các tham số sau:

$$c_n = \frac{12cL^4\omega_0}{Ebh^3}, \alpha_2 = \frac{6\epsilon L^4}{Eh^3d_0}, \alpha_3 = \frac{6L^4}{\epsilon Eh^3d_0}, \omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho b h L^4}} \quad (6)$$

$$w = \frac{W}{d_0}, \xi = \frac{x}{L}, \tau = \omega_0 t$$

Phương trình (4) đưa về không thứ nguyên sau đây:

$$w'''' + c_n \dot{w} + \ddot{w} = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1-w)^2} + \alpha_3 p_s^2 \quad (7)$$

trong đó độ võng không thứ nguyên  $w=w(\tau, \xi)$  là tỉ số giữa độ võng  $W(t, x)$  và khoảng cách  $d_0$  giữa hai bản tụ. Điều kiện biên tương ứng thu được từ (5) cho phương trình (7) là:

$$w(\tau, 0)=0, w'(\tau, 0)=0, w''(\tau, 1)=0, w'''(\tau, 1)=0 \quad (8)$$

Ta có thể sử dụng phương pháp Galerkin để đưa phương trình vi phân đạo hàm riêng (7) về dạng rời rạc hóa với số mode dao động hữu hạn. Để đơn giản, trong nghiên cứu này, ta giả sử rằng đáp ứng  $w$  có dạng tách biến

$$w=u(\tau)\phi(\xi) \quad (9)$$

trong đó  $u(\tau)$  là hàm chỉ của thời gian không thứ nguyên  $\tau$ ,  $\phi(\xi)$  là mode dao động đầu tiên của dao động tự do của dầm công - xôn ứng với điều kiện biên (8) và cho bởi [14]:

$$\phi(\xi) = \cos(\mu\xi) - \cosh(\mu\xi) - \sigma(\sin(\mu\xi) - \sinh(\mu\xi)) \quad (10)$$

trong đó  $\mu$  là nghiệm của phương trình đặc trưng  $1 + \cos \mu \cosh \mu = 0$ ;  $\sigma$  là hệ số cho bởi:

$$\sigma = \frac{\cos(\mu) + \cosh(\mu)}{\sin(\mu) + \sinh(\mu)} \quad (11)$$

Lưu ý rằng, ba giá trị nghiệm đầu tiên của phương trình đặc trưng  $1 + \cos \mu \cosh \mu = 0$  là 1.8751, 4.6941, 7.8548, trong đó với mode dao động đầu tiên thì ta lấy  $\mu = \mu_1 = 1.8751$ , và do đó giá trị  $\sigma$  tìm được là  $\sigma = 0.7341$ .

Thay biểu diễn (9) vào (7) và chú ý rằng  $\phi'''' = \omega_1^2 \phi$  với  $\omega_1 = \mu_1^2 = 3.5160$ , ta thu được:

$$(\ddot{u}(\tau) + c_n \dot{u}(\tau) + \omega_1^2 u(\tau))\phi(\xi) = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1-u(\tau)\phi(\xi))^2} + \alpha_3 p_s^2(\xi) \quad (12)$$

Ta thực hiện phương pháp Galerkin cho trường hợp đơn mode như sau. Nhân cả hai vế của (12) với  $(1-u(\tau)\phi(\xi))^2$ , sau đó nhân kết quả với hàm dạng  $\phi(\xi)$ , rồi tích phân trên đoạn  $[0, 1]$ , ta được:

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}(\tau) + c_n \dot{u}(\tau) + \omega_1^2 u(\tau)) \int_0^1 \phi^2(\xi) (1-u(\tau)\phi(\xi))^2 d\xi \\ & = \alpha_2 V_{DC}^2 \int_0^1 \phi(\xi) d\xi + \alpha_3 \int_0^1 p_s^2(\xi) \phi(\xi) (1-u(\tau)\phi(\xi))^2 d\xi \end{aligned} \quad (13)$$

Sau đây ta tính toán đáp ứng độ võng tĩnh của dầm trong các trường hợp khác nhau của mật độ điện tích bề mặt.

#### 3.1. Điều kiện ổn định của điểm cân bằng khi mật độ điện tích bề mặt dầm không đổi

Trường hợp  $p_s = p_0 = \text{const}$ . Các tích phân sau đây có thể được tính toán từ biểu diễn của hàm dạng đã biết:

$$\beta_1 = \int_0^1 \phi(\xi) d\xi, \beta_2 = \int_0^1 \phi^2(\xi) d\xi, \beta_3 = \int_0^1 \phi^3(\xi) d\xi, \beta_4 = \int_0^1 \phi^4(\xi) d\xi \quad (14)$$

Phương trình (13) được đưa về dạng sau đây:

$$\ddot{u}(\tau) + c_n \dot{u}(\tau) + \omega_1^2 u(\tau) = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\beta_1 - 2\beta_2 u(\tau) + \beta_3 u^2(\tau))}{\beta_2 - 2\beta_3 u(\tau) + \beta_4 u^2(\tau)} \quad (15)$$

Có thể thấy rằng phương trình (15) thu được là một phương trình vi phân phi tuyến, trong đó phần phi tuyến nằm ở vế phải, có dạng phân thức, phần biểu thức dưới mẫu được giả sử là khác không.

Trong trường hợp cân bằng tĩnh điện, khi mà vận tốc và gia tốc bị triệt tiêu, phương trình (15) sẽ cho phương trình tĩnh điện ứng với giá trị  $u = u_{le} = \text{const}$ . Trong tình huống này  $u_{le}$  là nghiệm của phương trình đại số sau:

$$\omega_1^2 u_{le} = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\beta_1 - 2\beta_2 u_{le} + \beta_3 u_{le}^2)}{\beta_2 - 2\beta_3 u_{le} + \beta_4 u_{le}^2} \quad (16)$$

Đặt  $\tilde{u} = u - u_{le}$  là nhiễu so với điểm cân bằng  $u_{le}$ . Thay thế biểu diễn này vào phương trình (15) ta thu được phương trình nhiễu sau:

$$\ddot{\tilde{u}}(\tau) + c_n \dot{\tilde{u}}(\tau) + \left[ \omega_1^2 - \frac{\partial g_1(u_{le})}{\partial u} \right] \tilde{u}(\tau) = 0 \quad (17)$$

trong đó hàm  $g_1 = g_1(u)$  cho bởi:

$$g_1(u) = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\beta_1 - 2\beta_2 u(\tau) + \beta_3 u^2(\tau))}{\beta_2 - 2\beta_3 u(\tau) + \beta_4 u^2(\tau)} \quad (18)$$

Điều kiện ổn định cho phương trình (17) là:

$$c_n > 0 \quad (19.1)$$

$$\omega_1^2 - \frac{\partial g_1(u_{le})}{\partial u} > 0 \quad (19.2)$$

Ở đây giả sử cần đã cho là cần dương, và do đó điều kiện (19.1) sẽ tự động được thỏa mãn. Điều kiện (19.2) sẽ là điều kiện ổn định của nghiệm của phương trình vi phân ban đầu (15) theo tiêu chuẩn Routh-Hurwitz [15] cho phương trình bậc hai ứng với phương trình đặc trưng của hệ tuyến tính nhiễu (17).

Phương trình (16) có thể đưa về phương trình bậc ba sau đây để tìm điểm dừng  $u_{le}$

$$u_{ie}^3 + a_2 u_{ie}^2 + a_1 u_{ie} + a_0 = 0 \quad (20)$$

trong đó các hệ số  $a_0, a_1, a_2$  cho bởi:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\left(\frac{\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2} + \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{\omega_1^2}\right) \frac{\beta_1}{\beta_4} \\ a_1 &= \left(1 + \frac{2\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{\beta_2}{\beta_4} \\ a_2 &= -\left(2 + \frac{\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{\beta_3}{\beta_4} \end{aligned} \quad (21)$$

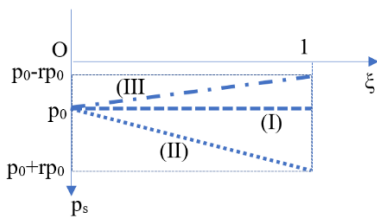
Có thể thấy rằng từ biểu thức của các tích phân (14) thì  $\beta_1 < 0, \beta_3 < 0, \beta_2 > 0, \beta_4 > 0$ . Từ đó dẫn đến hệ quả là các hệ số  $a_0, a_1, a_2$  của phương trình (20) đều dương. Vì phương trình bậc ba với hệ số thực có ít nhất một nghiệm thực nên để đảm bảo về mặt vật lý, trong tình huống của chúng ta nghiệm thực phải là thực âm bởi vì độ võng tĩnh  $w = u_i \phi > 0$  và giá trị của hàm  $\phi(\xi) < 0 \forall \xi \in [0, 1]$ . Các hệ số  $a_0, a_1, a_2$  phụ thuộc vào các tham số vật lý của hệ gồm  $\alpha_2 V_{DC}^2, \alpha_3 p_0^2$  nên phương trình đại số bậc ba (20) có thể có một, hai hoặc ba nghiệm tùy vào giá trị của các tham số này. Trong phần giải số, ta sẽ chỉ ra các nghiệm thu được từ phương trình (20) cho đáng điều đáp ứng độ võng của dầm phụ thuộc như thế nào vào hai đại lượng tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2, \alpha_3 p_0^2$ . Đối với dầm công - xôn, người ta quan tâm đến đáp ứng độ võng tĩnh tại đầu tự do của dầm, nghĩa là cần xác định độ võng  $w = w_1 = u_{ie} \phi(1)$ .

### 3.2. Điều kiện ổn định của điểm cân bằng khi mật độ điện tích bề mặt dầm thay đổi tuyến tính dọc theo chiều dài dầm

Để tổng quát cả hai trường hợp mật độ điện tích bề mặt thay đổi dọc theo chiều dài dầm từ phải sang trái hoặc từ trái sang phải, hàm mật độ điện tích được viết dưới dạng sau:

$$p_s = p_0(1 + r\xi) = p_0(1 + r\xi) \quad (22)$$

trong đó  $r = r_1 L > 0$  trong trường hợp mật độ điện tích tăng dần từ trái sang phải, tức là tăng dần từ phần đầu ngàm đến đầu tự do của dầm; còn  $-1 \leq r \leq 0$  thể hiện cho mật độ điện tích giảm dần từ phần đầu ngàm sang đầu tự do của dầm. Giá trị của  $r \geq -1$  để đảm bảo rằng hàm mật độ điện tích không âm. Hình 2 thể hiện đáng điều của hàm mật độ điện tích cho ba trường hợp: (I)-mật độ điện tích hằng số; (II)-mật độ điện tích thay đổi tăng dần dọc theo chiều dài dầm từ đầu ngàm đến đầu tự do; (III)-mật độ điện tích giảm dần từ đầu ngàm về đầu tự do. Mật độ điện tích lớn nhất tại đầu tự do của dầm trong trường hợp (II) là  $p_0 + rp_0$ .



Hình 2. Hàm mật độ điện tích thay đổi dọc theo chiều dài dầm

Thay biểu thức của  $p_s(\xi)$  từ (22) vào vế phải của (15), ta được phương trình vi phân

$$u''(\tau) + c_n u'(\tau) + \omega_1^2 u(\tau) = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2 u(\tau) + \gamma_3 u^2(\tau))}{\beta_2 - 2\beta_3 u(\tau) + \beta_4 u^2(\tau)} \quad (23)$$

trong đó các hệ số  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  cho bởi:

$$\gamma_1 = \int_0^1 (1 + r\xi)^2 \phi(\xi) d\xi, \gamma_2 = \int_0^1 (1 + r\xi)^2 \phi^2(\xi) d\xi, \gamma_3 = \int_0^1 (1 + r\xi)^2 \phi^3(\xi) d\xi \quad (24)$$

Nghiệm dừng của phương trình (23) là nghiệm của hệ sau:

$$\omega_1^2 u_{ie} = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2 u_{ie} + \gamma_3 u_{ie}^2)}{\beta_2 - 2\beta_3 u_{ie} + \beta_4 u_{ie}^2} \quad (25)$$

Phương trình (25) được đưa về dạng phương trình của đa thức bậc ba sau đây:

$$u_{ie}^3 + c_2 u_{ie}^2 + c_1 u_{ie} + c_0 = 0 \quad (26)$$

trong đó các hệ số  $c_0, c_1, c_2$  cho bởi:

$$\begin{aligned} c_0 &= -\left(\frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{\omega_1^2} + \frac{\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2} \frac{\gamma_1}{\beta_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta_4} \\ c_1 &= \left(1 + \frac{2\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2} \frac{\gamma_2}{\beta_2}\right) \frac{\beta_2}{\beta_4} \\ c_2 &= -\left(2 + \frac{\alpha_3 p_0^2}{\omega_1^2} \frac{\gamma_3}{\beta_3}\right) \frac{\beta_3}{\beta_4} \end{aligned} \quad (27)$$

Chú ý rằng các hệ số của phương trình (26) khác với các hệ số của phương trình (20) ở các giá trị tỉ số  $\gamma_1 / \beta_1, \gamma_2 / \beta_2, \gamma_3 / \beta_3$  thể hiện đóng góp của hàm mật độ điện tích khi nó không phải là hằng số mà là hàm thay đổi theo chiều dài dầm và phụ thuộc tham số điện tích bậc nhất  $r \geq -1$ .

Điều kiện ổn định cho phương trình (23) tương tự như phương trình (19.2), tức là ta có điều kiện ổn định sau:

$$\omega_1^2 - \frac{\partial g_2(u)}{\partial u} > 0 \quad (28)$$

trong đó  $g_2(u)$  cho bởi:

$$g_2(u) = \frac{\alpha_2 V_{DC}^2 \beta_1 + \alpha_3 p_0^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2 u + \gamma_3 u^2)}{\beta_2 - 2\beta_3 u + \beta_4 u^2} \quad (29)$$

Điều kiện ổn định (28) sẽ được kiểm chứng bằng tính toán số.

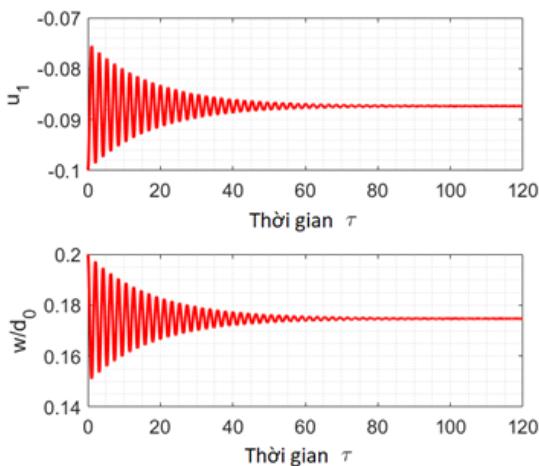
## 4. Một dạng mất ổn định của đáp ứng dầm

Trong phần này, các tác giả mô phỏng số kết quả mất ổn định của đáp ứng dầm khi thay đổi điện thế giữa hai bản cực và sự thay đổi của điện tích tĩnh trên dầm công - xôn. Sự thay đổi của điện thế  $V_{DC}$  và mật độ điện tích  $p_s$  có thể dẫn đến một hiện tượng mà ở đó đáp ứng tĩnh hoặc động của dầm công - xôn có thể mất ổn định và có thể chạm vào điện cực cố định, gọi là hiện tượng mất ổn định kéo vào (pull-in instability), hay sau đây gọi là *mất ổn định thoát*, nghĩa là biên độ đáp

ứng có thể thoát khỏi một miền bị chặn nhất định (theo nghĩa toán học). Trong thực tế thì nếu lực tĩnh điện hoặc điện thế đạt đến một ngưỡng nào đó, nó có thể gây ra hiện tượng mất ổn định ở trên [1,2]. Quan sát về mặt toán học thì hiện tượng mất ổn định xuất hiện khi đáp ứng của hệ không còn bị giam hãm trong miền bị chặn cho trước, cụ thể đáp ứng của đầu tự do của dầm công - xôn vượt quá giá trị  $d_0$  là khoảng cách giữa hai bản tụ. Trong khi đó về mặt vật lý, sự vượt qua  $d_0$  của đầu tự do của dầm công - xôn là không thể vì nó bị chặn bởi bản tụ cố định bên dưới. Trong khảo sát số, chúng ta sẽ quan sát ứng xử về mặt toán học và kết hợp với đặc điểm về ràng buộc vật lý để đưa ra kết quả mất ổn định của hệ.

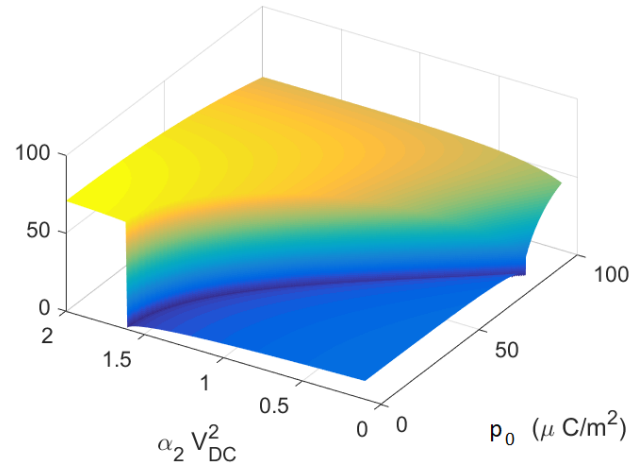
#### 4.1. Đáp ứng đầu tự do của dầm trong trường hợp mật độ điện tích là hằng số

Hình 3 minh họa đáp ứng theo thời gian không thứ nguyên  $\tau$  của  $u=u_1(\tau)$  và tỉ số chuyển dịch  $w=W/d_0$  tại đầu tự do của dầm mô phỏng cho phương trình vi phân (15) với điều kiện đầu  $u(0)=-0.1, \dot{u}(0)=0$ . Tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2$  và  $\alpha_3 p_0^2$  được lấy lần lượt là  $\alpha_2 V_{DC}^2=1.0$ ,  $\alpha_3 p_0^2=0.0603$ . Với giá trị  $\alpha_3=6.0332 \times 10^8$  thì giá trị  $p_0$  tìm được là  $p_0=10 (\mu C/m^2)$ . Chú ý rằng đáp ứng  $u_1$  với điều kiện đầu cho trước, sau một thời gian nó sẽ đi vào trạng thái bình ổn và dừng, tiến tới một giá trị hằng số  $u_{ie}=-0.08731$ . Giá trị hằng số này đồng thời cũng chính là nghiệm của phương trình dừng (16). Giá trị của tỉ số  $w$  tại đầu tự do của dầm cho bởi  $w=u_{ie}\phi(1)=0.1746$ , bằng tích của giá trị dừng tìm được và giá trị của hàm dạng trong mode dao động thứ nhất tại điểm cuối của dầm, đặc trưng bởi điểm  $\xi=x/L=1$ . Kết quả trên Hình 3 phản ánh rằng đáp ứng thu được từ các tham số đã cho của hệ là có tính chất ổn định. Giá trị tỉ số độ võng của đầu dầm trong trường hợp này chỉ vào khoảng 0.1746, tức xấp xỉ gần 20% khe trống giữa hai bản tụ. Giá trị này có thể tăng nếu điện thế đặt vào hai bản tụ tăng lên với việc giữ nguyên mật độ điện tích.

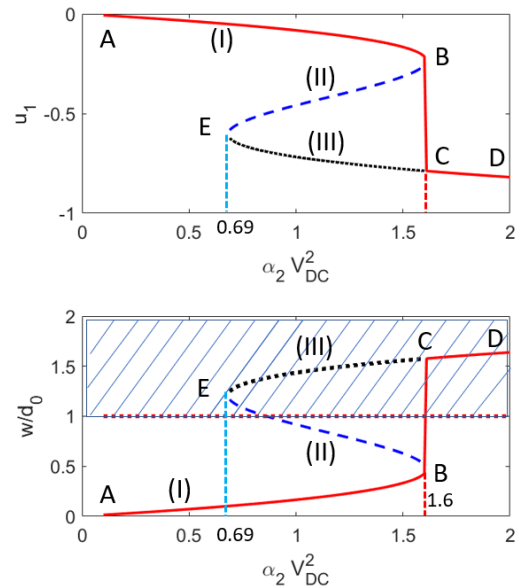


**Hình 3.** Tiến triển theo thời gian của đáp ứng  $u=u_1(\tau)$  và tỉ số đáp ứng  $W/d_0$

tại đầu tự do của dầm



**Hình 4.** Bề mặt điều kiện ổn định phụ thuộc hai tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2$  và  $p_0$



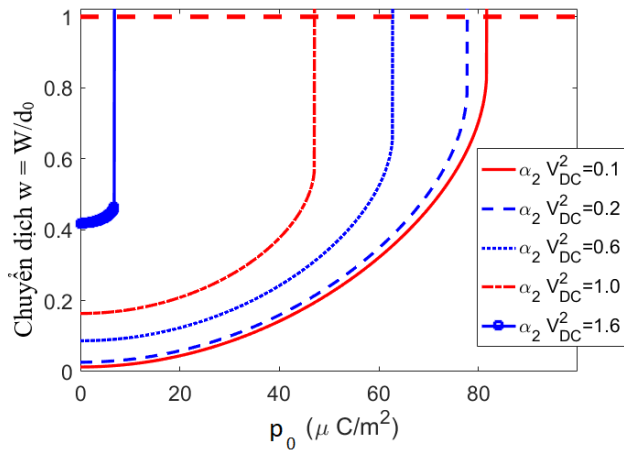
**Hình 5.** Đường cong nghiệm và miền ổn định nghiệm

[vị trí cắt của đường (II) và đường  $w/d_0=1$  là 0.86]

Điều kiện ổn định thu được từ phương trình (19) được kiểm tra bằng tính toán số. Theo đó, đại lượng  $\Delta_1 = \omega_1^2 - \partial g_1(u_{ie}) / \partial u$  được minh họa như một mặt cong phụ thuộc hai tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2$  và  $p_0$ . Giá trị của mặt cong được tính tại điểm dừng  $u_{ie}$  là nghiệm của phương trình (20). Minh họa mặt cong này có thể quan sát trên Hình 4 trong đó tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2$  được lấy trên đoạn  $[0.1, 2.0]$ , tham số  $p_0$  được lấy trên đoạn  $[0, 100] (\mu C/m^2)$ . Giá trị của mặt cong tại mọi điểm quan sát đều lớn hơn không. Điều này cho thấy điều kiện ổn định đã được thỏa mãn trên miền tham số đang xét. Về mặt phương trình đại số, ta có thể thấy rằng tùy vào tham số rơi vào miền nào mà phương trình bậc ba (20) có thể có một, hai, hoặc ba nghiệm. Để minh họa ta xét một trường hợp mà



$p_0 = 4 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$  cố định, còn  $\alpha_2 V_{DC}^2$  thay đổi trên đoạn  $[0.1, 2.0]$ . **Hình 5** minh họa đường cong nghiệm của phương trình (20) khi  $\alpha_2 V_{DC}^2$  thay đổi từ 0.1 đến 2.0. Đường cong nghiệm này chia làm ba nhánh: nhánh (I), (II) và (III). Nhánh (I) là đường nét liền ABCD, trong đó có xuất hiện bước nhảy từ B đến C; nhánh (II) là nhánh BE nét đứt màu xanh; nhánh (III) là nhánh EC. Tại giá trị  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 0.69$  phương trình (20) có hai nghiệm, một nghiệm tại E và một nghiệm cắt đường AB; tương tự như thế tại  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 1.6$ , phương trình cũng có hai nghiệm. Như vậy trong khoảng  $(0.69, 1.6)$  phương trình bậc 3 có tới ba nghiệm, ngoài khoảng này, không kể hai điểm 0.69 và 1.6 thì phương trình chỉ có duy nhất một nghiệm. Tuy nhiên không phải tất cả các nghiệm tìm được đều đáp ứng được điều kiện tỉ số  $w = W/d_0$  nhỏ hơn 1 để đảm bảo mất ổn định thoát không xảy ra. Tại đầu tự do của dầm, tỉ số  $w$  được tính toán tương ứng với nghiệm thu được. Đồ thị giá trị của  $w$  được minh họa trên hình thứ hai của **Hình 5**. Với những giá trị nghiệm mà  $w \geq 1$  được loại bỏ, và cuối cùng ta chỉ còn hai nhánh (I) và một phần của nhánh (II) nằm dưới đường thẳng  $w=1$  được giữ lại. Tuy nhiên phần còn lại của nhánh (II) thuộc loại mất ổn định, nên chỉ còn lại nhánh (I) đáp ứng điều kiện ổn định nghiệm. Rõ ràng rằng, xét trên nhánh (I) thì tại giá trị  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 1.6$  ta thu được giá trị điện thế thoát (ứng với trường hợp lấy  $p_0 = 4 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$ ). Điều đó đồng nghĩa với việc nếu ta cố tăng điện thế  $V_{DC}$  thì lúc đó đầu tự do của dầm đã chạm vào bản cực cố định. Hiện tượng này có thể được sử dụng làm công tắc bật/tắt trong một số ứng dụng của hệ MEMS.



**Hình 6.** Ảnh hưởng của mật độ điện tích  $p_0$  đến đáp ứng thoát của vị trí đầu tự do dầm với các giá trị khác nhau của tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2$ :

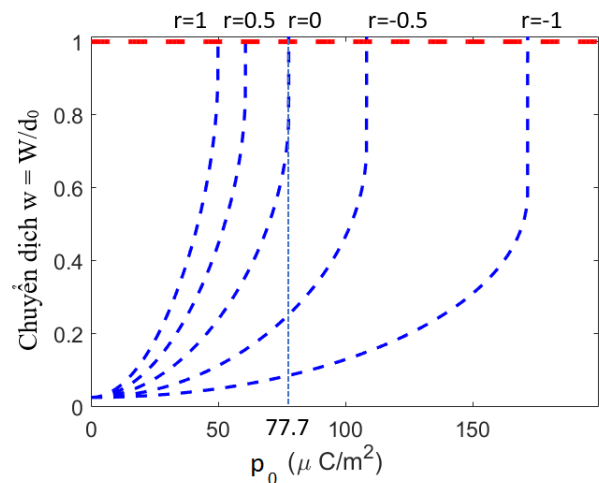
$$\alpha_2 V_{DC}^2 = 0.1, 0.2, 0.6, 1.0, 1.6$$

**Hình 6** minh họa hiện tượng thoát của tỉ số chuyển dịch  $w = W/d_0$  với các giá trị tham số khác nhau  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 0.1, 0.2, 0.6, 1.0, 1.6$  và theo sự thay đổi của mật độ  $p_0$  từ 0 đến  $90 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$ . Có thể thấy rằng khi điện thế  $V_{DC}$  tăng dẫn đến một thực tế rằng chỉ cần một lượng điện tích nhất định là hiện tượng thoát có thể xảy ra. Điều này là có thể hiểu được bởi vì khi điện thế tăng, lực

tĩnh điện giữa hai bản cực sẽ tăng lên kéo đầu tự do của dầm về phía bản cực cố định, lại thêm tồn tại các điện tích trên bề mặt dầm dẫn đến hiện tượng kéo diễn ra được tăng cường. Khi điện thế giữa hai bản cực nhỏ, chẳng hạn với tham số  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 0.1$ , cần một lượng điện tích với mật độ lớn nhất định thì hiện tượng thoát mới diễn ra, cụ thể ở đây ta tìm được mật độ điện tích ứng với  $\alpha_2 V_{DC}^2 = 0.1$  là  $81.6 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$ .

#### 4.2. Đáp ứng đầu tự do của dầm trong trường hợp mật độ điện tích thay đổi

Trong phần này, ta xét trường hợp hàm mật độ điện tích thay đổi theo chiều dài của dầm và được đặc trưng bởi hệ số thay đổi bậc nhất  $r$ . Trong tính toán,  $r$  sẽ được lấy từ -1 đến 1. Giá trị  $r = -1$  có nghĩa rằng hàm mật độ điện tích thay đổi giảm dần từ vị trí ngàm của dầm công - xon về giá trị 0 tại đầu tự do của dầm. Giá trị  $r = 1$  có nghĩa rằng hàm mật độ điện tích tăng từ  $p_0$  ở đầu ngàm đến giá trị  $2p_0$  tại đầu tự do của dầm, tức tăng gấp đôi so với  $p_0$ . Năm giá trị được lựa chọn tính toán gồm:  $r = 1.0, 0.5, 0, -0.5, -1.0$ . Giá trị  $r = 0$  phản ánh rằng đây là giá trị giữa hai miền mà ở đó mật độ điện tích tăng hoặc giảm. Với  $r = 0$ , các tính toán trở về trường hợp hàm mật độ điện tích hằng số tương tự như khảo sát ở phần trước đó. Các tính toán sẽ dựa vào kết quả của phương trình vi phân (23) và phương trình đại số (26) với sự tham gia của tham số  $r$ . Các khảo sát về điều kiện ổn định và điều kiện thoát là tương tự như phần 4.1. **Hình 7** minh họa đáp ứng  $w = W/d_0$  ứng với các giá trị  $r$  khác nhau. Với  $r = 0$ , mật độ điện tích  $p_0$  xảy ra hiện tượng thoát là  $p_0 = 77.7$ . Nếu giảm  $r$  ta có thể thấy giá trị  $p_0$  cho hiện tượng thoát có thể tăng lên rõ rệt, tức là cần một mức điện tích khá lớn thì hiện tượng thoát mới xảy ra, chẳng hạn với  $r = -1$  thì mật độ điện tích thoát  $p_0$  tìm được rơi vào  $171.6 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$ . Giá trị này được xem khá cao so với giá trị mật độ thoát ứng với  $r = 0$  là  $77.7 \text{ (}\mu\text{C/m}^2\text{)}$ . Bảng giá trị mật độ thoát  $p_0$  ứng với các  $r$  khác nhau được liệt kê trong **Bảng 1**.



**Hình 7.** Đáp ứng tỉ số chuyển dịch  $w = W/d_0$  tại đầu tự do của dầm với các hệ số điện tích bậc nhất khác nhau:  $r = 1.0, 0.5, 0, -0.5, -1.0$

Bảng 1. Giá trị mật độ thoát  $p_0$  ứng với hệ số đặc trưng điện tích bậc nhất  $r$

$r$	-1	-0.5	0	0.5	1.0
$p_0$	171.6	108.3	77.7	60.7	49.9

Nếu coi  $r=0$  là ngưỡng trung bình nơi mà hàm mật độ điện tích không đổi, khi tăng  $r$  giống như việc đầu tự do của dầm bị hút thêm một lực về phía bản tụ cố định, do đó hiện tượng thoát xảy ra sẽ ứng với hàm mật độ điện tích nhỏ hơn với cùng một điện thế tác dụng lên hệ. Điều này gợi ý rằng hàm mật độ điện tích có thể coi như một đối tượng tham số tham gia vào quá trình điều khiển hiện tượng thoát trong hệ dầm. Chẳng hạn nếu mong muốn mật độ điện tích thoát thấp, ta cần sử dụng hàm mật độ tăng theo chiều từ đầu ngàm đến đầu tự do của dầm; điều này đặc biệt hữu ích trong thiết kế các mạch tắt/mở sử dụng cảm biến dựa trên hệ MEMS.

## 5. Kết luận

Hiện tượng mất ổn định kéo vào, hay mất ổn định thoát nghiên cứu trong bài báo này là một trong hiện tượng quan trọng có ảnh hưởng đến quá trình thiết kế một hệ MEMS. Trong khuôn khổ bài báo, các tác giả đã đề xuất nghiên cứu hiện tượng thoát tĩnh điện cho một hệ bản tụ được mô hình như một dầm công - xôn, trong đó có xét đến ảnh hưởng của mật độ điện tích tồn tại trên bề mặt của dầm. Mô hình hóa bài toán được thực hiện thông qua tính toán đơn mode. Ưu điểm của việc sử dụng đơn mode là nó có tính đơn giản, trong khi đó tình huống nghiên cứu của bài toán dẫn đến việc giải một phương trình đại số bậc ba có công thức nghiệm chính xác. Một số kết luận rút ra từ nghiên cứu như sau:

- Đã đưa ra điều kiện ổn định nghiệm cho phương trình dao động của dầm công - xôn trong trường hợp đơn mode khi hàm mật độ điện tích là hằng số và hàm mật độ điện tích thay đổi theo chiều dài dầm. Điều kiện ổn định nghiệm được khảo sát bằng số và chỉ ra đường cong ổn định tương ứng.

- Đã tính toán các giá trị của hàm mật độ điện tích mà hiện tượng thoát xảy ra trong tương tác tĩnh điện của hệ dầm. Nếu điện thế đặt vào hệ tăng thì hiện tượng thoát xảy ra sẽ ứng với lượng điện tích trên bề mặt dầm có hàm mật độ nhỏ hơn trong trường hợp hàm mật độ hằng số.

- Nếu hàm mật độ điện tích tăng theo chiều từ đầu ngàm đến đầu tự do của dầm, giá trị điện tích thoát sẽ giảm đi, gợi ý cho việc thiết kế hệ dầm MEMS với mật độ điện tích thoát nhỏ cho các cảm biến có kiểu tắt/bật mong muốn.

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Mỏ - Địa chất, mã số đề tài: T23-16.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Nadim Maluf, Kirt Williams, *An introduction to microelectromechanical systems engineering*, Artech House Publishers, 2004.
- [2] Mohamed Gad-el-Hak, *The MEMS Handbook MEMS Design*, The CRC Press, 2005.
- [3] V. Rochus, D.J. Rixen, J.C. Golinval, "Electrostatic coupling of MEMS structures: transient simulations and dynamic pull-in," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 63, pp. e1619-e1633, 2005. DOI: 10.1016/j.na.2005.01.055
- [4] Ali H. Nayfeh, Mohammad I. Younis, Eihab M. Abdel-Rahman, "Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators," *Nonlinear Dynamics*, 48, pp. 153–163, 2007. DOI 10.1007/s11071-006-9079-z
- [5] Dumitru I. Caruntu, Israel Martinez, "Reduced order model of parametric resonance of electrostatically actuated MEMS cantilever resonators," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 66, pp. 28-32, 2014
- [6] Huilin Shang, "Pull-in instability of a typical electrostatic MEMS resonator and its control by delayed feedback," *Nonlinear Dynamics*, 90, pp. 171–183, 2017.
- [7] Ben Rivlin, Shai Shmulevich, Inbar Hotzen and David Elata, "A gap-closing electrostatic actuator with a linear extended range," *Journal of Microelectromechanical Systems*, 22, pp. 1109 -1114, 2013.
- [8] Qiao D-Y, Yuan W-Z, Li X-Y., "A two-beam method for extending the working range of electrostatic parallel-plate micro-actuators," *Journal of Electrostatics*, 65(4), pp.v256–262, 2007.
- [9] Grade J.D, Jerman H, Kenny T.W., "Design of large deflection electrostatic actuators," *Journal of Microelectromechanical Systems*, 12(3), pp. 335–343, 2003.
- [10] Chan E.K, Dutton R.W., "Electrostatic micromechanical actuator with extended range of travel," *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(3), pp. 321–328, 2000.
- [11] Wibbeler J., Pfeifer G., Hietschold M., "Parasitic charging of dielectric surfaces in capacitive microelectromechanical systems (MEMS)," *Sensors and Actuators A*, 71(1–2), pp. 74–80, 1998.
- [12] Pai P., Tabib-Azar M., "Low voltage-Enhanced actuation MEMS cantilevers using Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub> electrets," In: 2013 IEEE 26th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). IEEE, p. 572–575, (2013).
- [13] Choi J.M., Hwang S.U., Kim C.H., Yang H.H., Jung C., Gyu Park H., et al. "An electrostatic micromechanical biosensor for electrical detection of label-free DNA," *Applied Physics Letters*, 100(16), pp. 163701, 2012.
- [14] Mithlesh Kumar, Banibrata Mukherjee, Siddhartha Sen, "Analysis of static charge induced pull-in of an electrostatic MEMS," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 96, pp. 105690, 2021.
- [15] Anagnost J.J., Desoer C.A., "An elementary proof of the Routh-Hurwitz stability criterion," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 10, pp. 101–114, 1991.